Вступительная олимпиада. 5 класс.

Решения задач и критерии проверки.

За каждую задачу можно получить от 0 до 4 баллов.
Результатом олимпиады считается сумма баллов по всем задачам.

Задания.

1. Электронные часы показывают время: часы — двумя цифрами, минуты — двумя цифрами и секунды — двумя цифрами. Укажите наибольшую возможную сумму цифр, одновременно показываемых часами.

Ответ: 38

Решение: Самой большой суммой цифр среди чисел от 0 до 23 обладает число 19. А среди чисел от 0 до 59 — число 59. Тогда наибольшая сумма цифр достигается, когда часы показывают 19 : 59 : 59, а именно 1+9+5+9+5+9 = 38.

2. Юра и Максим вместе складывали бумажные самолетики. Всего они сложили 25 самолетиков. Если бы Юра сложил на треть самолетиков больше, а Максим — в 2 раза меньше, то общее количество самолетиков не изменилось бы. Сколько самолетиков сложил каждый из мальчиков?

Ответ: Юра — 15, Максим — 10.

Решение 1: Заметим, что треть самолетиков, сложенных Юрой, должна равняться половине самолетиков, сложенных Максимом. Тогда все самолетики составляют 5 долей, три из которых приходятся на долю Юры и две — на долю Максима. Одна доля равна 5 самолетикам. Значит Юра сложил 15, а Максим — 10.

Решение 2: Пусть Юра сложил x самолетиков, а Максим — $25 - x$. Тогда решим уравнение:

$$x + \frac{1}{3}x + \frac{25 - x}{2} = 25$$

$$6x + 2x + 3(25 - x) = 150$$

$$5x + 75 = 150$$

$$x = 15$$

Значит Юра сложил 15 самолетиков, а Максим — 10.

Критерии:

- Ответ угадан или найден неполным перебором и не доказано, что других ответов нет — 1 балл.

3. Барон Мюнхгаузен прибыл на остров рыцарей и лжецов, где все жители либо всегда говорят правду, либо всегда лгут. Подойдя к развилке из 4 дорог, ровно одна из которых ведет в замок, барон повстречал неразговорчивого стражника. Стражник готов ответить лишь на три вопроса барона, причем только словами «Да» или «Нет». Как барону узнать путь к замку? (Обратите внимание, что нам неизвестно является ли стражник рыцарем или лжецом)

Решение 1:
1 вопрос: Правда ли, что ты стражник?
Если ответ «Да», то стражник рыцарь, если «Нет», то лжец. Без ограничения общности будем считать, что стражник — рыцарь (если же он лжец, то будем мысленно менять все его ответы на противоположные).
2 вопрос: Правда ли, что одна из первых двух дорог ведет в замок? Если ответ «Да», то 3 вопросом спросим про первую дорогу и определим какая из первых двух дорог ведет в замок. Если ответ «Нет», то 3 вопросом спросим про третью дорогу и определим третья или четвертая дорога ведет в замок.

Решение 2:
1 вопрос: Первая дорога ведет в замок?
2 вопрос: Вторая дорога ведет в замок?
3 вопрос: Третья дорога ведет в замок?
Вне зависимости от того рыцарем или лжецом является стражник, если на какие-то вопросы получены одинаковые ответы, то дороги из этих вопросов не ведут в замок. Тогда если все три ответа одинаковые, то в замок ведет четвертая дорога, если же два ответа одинаковые, а третий отличается, то в замок ведет дорога с отличающимся ответом.

4. У Аллы есть 6 видов сережек, 4 вида браслетов и 3 вида заколок. Алла решила каждый раз как направляется в школу надевать набор предметов, который она еще ни разу не надевала до этого. Наборы предметов считаются разными, если они не полностью совпадают, при этом Алла может носить не более одного аксессуара каждого вида (в том числе может какие-то украшения вовсе не надевать). Какое количество походов в школу сможет Алла соблюдать свое правило?

Ответ: 140.

Решение 1: Добавим мысленно «пустой» вид сережек, браслетов и заколок. Если Алла возьмет «пустой» вид, это будет означать, что такое украшение она не надевала. Тогда всего будет 7 видов сережек, 5 видов браслетов и 4 вида заколок. А значит всего наборов будет $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$.

Решение 2: Всего наборов состоящих из всех трех предметов — $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$
Наборов без сережек — $4 \cdot 3 = 12$
Наборов без браслетов — $6 \cdot 3 = 18$
Наборов без заколок — $6 \cdot 4 = 24$
Наборов только из сережек — 6
Наборов только из браслетов — 4
Наборов только из заколок — 3

А также существует пустой набор, когда Алла не надела ни одно из украшений.
Всего различных наборов тогда $72 + 12 + 18 + 24 + 6 + 4 + 3 + 1 = 140$.

Критерии:

- Во втором решении не учтено, что существует пустой набор — 3 балла.
- Допущена арифметическая ошибка, не влияющая на логику решения — минус 1 балл.

5. Миша выписал в строку 2025 последовательных чисел. Во второй строке под каждым числом он написал его собственный делитель (т.е. делитель, отличный от самого числа). Могло ли так быть, что во второй строке написаны также последовательные числа?

Ответ: Да.

Решение: Пусть в первой строчке были выписаны числа:
$2025! + 1, 2025! + 2, 2025! + 3, ..., 2025! + 2025$.
Каждое число вида $2025! + k$ делится на k, для всех натуральных $k \leqslant 2025$.
Значит во второй строчке могли быть выписаны числа $1, 2, 3, ..., 2025$.