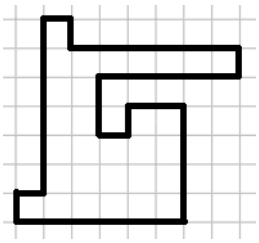
Вступительная олимпиада. 5 класс.

Решения задач и критерии проверки.

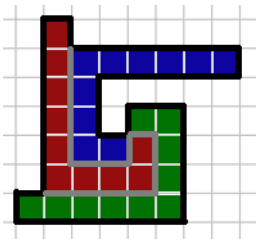
За каждую задачу можно получить от 0 до 4 баллов.
Частичные баллы за различные критерии не складываются.
Результатом олимпиады считается сумма баллов по всем задачам.

Задания.

1. Разрежьте данную фигуру на три равные части. Резать можно только по линиям сетки.



Решение: Серые линии обозначают линии разреза. Получившиеся три равные фигуры покрашены в красный, зеленый и синий цвета.



Критерии:

- Приведен верный пример разрезания — 4 балла.
- Пример является полным обоснованием к задаче. Дополнительных обоснований не требовалось.

2. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Однажды 2025 островитян встали в круг и каждый из них сказал: «Мои соседи либо оба лжецы, либо оба рыцари». Какое количество лжецов могло стоять в этом кругу? Найдите все варианты и докажите, что других вариантов нет.

Решение: Заметим, что круг состоит либо из всех лжецов, либо из всех рыцарей, либо из чередующихся последовательностей лжецов и рыцарей.

- Из всех лжецов круг состоять не может, т.к. тогда у любого лжеца, оба соседа будут лжецами, а значит он сказал правду, т.е. являлся рыцарем.
- Из всех рыцарей круг может состоять. В этом случае лжецов в кругу было 0.
- Если круг состоит из чередующихся последовательностей лжецов и рыцарей, то рассмотрим произвольного лжеца. Его соседями будут рыцарь и лжец. Без ограничения общности скажем, что его соседом по часовой стрелке был лжец. Тогда следующим за ним по часовой стрелке идет рыцарь, в противном случае у лжеца оказались бы одинаковые соседи.

За рыцарем вновь идет лжец, т.к. соседи рыцаря должны быть одинаковым и т.д. Значит однозначно восстанавливается последовательность «ЛЛРЛЛРЛЛР...», т.е. весь круг должен разделиться на тройки «ЛЛР». Число 2025 делится на 3, значит для данного круга это возможно. Количество лжецов будет равно $2025 : 3 \times 2 = 1350$.

Ответ: 0 или 1350 лжецов.

Критерии:

- Найдены оба значения и доказано, что других примеров нет — 4 балла.
- Допущена арифметическая ошибка в подсчете количества лжецов — 3 балла.
- Не учтено, что лжецов может не быть в кругу, при этом найден и обоснован пример на 1350 лжецов — 2 балла.
- Найдены оба примера, но не обоснованно, что других вариантов нет — 2 балла.
- Найден пример на 0 или пример на 1350 без обоснований — 1 балл.

3. В некотором классе 14 учеников любят играть в футбол, 11 — в теннис и 8 — в шахматы. При этом оказалось, что 7 человек любят футбол и теннис, 5 человек — футбол и шахматы, и 6 человек — теннис и шахматы. А также 5 человек любят все три вида спорта одновременно. Найдите количество учеников в этом классе, если известно, что еще 5 не любят ни один из этих видов спорта.

Первое решение: Если 7 человек любят футбол и теннис, а 5 любят все виды спорта, то только футбол и теннис любят 2 человека. Аналогично, только футбол и шахматы любят 0 человек, только теннис и шахматы — 1 человек. В таком случае только футбол любят $14-2-0-5=7$ человек, только теннис любят $11-2-1-5=3$ человека, только шахматы любят $8-0-1-5=2$ человека. Значит суммарное количество людей в классе складывается из тех, кто любит ровно 1 вид спорта (таких $7+3+2=12$), тех, кто любит ровно 2 вида спорта (таких $2+1+0=3$), тех, кто любит все три вида спорта (таких 5), и еще 5 человек, которые не любят ни один вид спорта. Итого 25 человек.

Второе решение: Воспользуемся формулой включений и исключений для трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

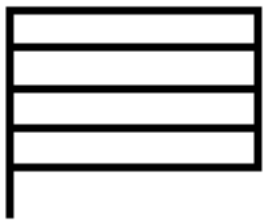
Пусть множество A — любители футбола, B — тенниса, C — шахмат. Тогда общее количество людей в классе, которые любят хотя бы один вид спорта $|A \cup B \cup C| = 14+11+8-7-6-5+5 = 20$ человек. И еще 5 человек не любят ни один вид спорта. Итого 25 человек.

Ответ: 25 человек.

Критерии:

- Приведено верное обоснованное решение — 4 балла.
- Допущена арифметическая ошибка, не влияющая на логику решения — 3 балла.
- Верно посчитаны количества любителей ровно одного и ровно двух видов спорта, но нет дальнейших продвижений — 2 балла.
- В формуле включений и исключений перепутан знак перед $|A \cap B \cap C|$, остальное посчитано верно — 2 балла.
- Верно посчитаны количества любителей ровно двух видов спорта, но нет дальнейших продвижений — 1 балл.
- Формулой включений и исключений, а также кругами Эйлера можно было пользоваться без доказательства.

4. Мышиный король решил выбрать флаг своему королевству. У него есть много полосок 5 различных цветов, из которых он хочет сшить четырехполосный флаг (см. рис). Какое количество различных флагов может сшить мышиный король, если любые соседние полосы на флаге должны быть разноцветными?



Первое решение: Пронумеруем полосы флага сверху вниз. Заметим, что первая полоска может быть всех 5 цветов, вторая полоска — 4 цветов (всех кроме цвета верхней), третья полоска — 4 цветов (всех кроме цвета второй) и четвертая полоска — 4 цветов (всех кроме цвета третьей). Значит всего вариантов $5 \times 4 \times 4 \times 4 = 320$.

Второе решение: Рассмотрим всевозможные виды флагов. Флаг может быть:

- четырехцветный. Чтобы сшить такой флаг нужно выбрать 4 разные полоски в определенной порядке. Количество способов так сделать $A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 120$.
- трехцветный. Чтобы сшить такой флаг нужно сначала выбрать две полоски, которые будут одноцветные (3 варианта) затем выбрать три цвета в определенном порядке, т.е. $3A_5^3 = 3 \times \frac{5!}{2!} = 180$
- двухцветный. Чтобы сшить такой флаг нужно выбрать два цвета в определенном порядке, т.е. $A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 20$

Значит всего вариантов флагов: $120 + 180 + 20 = 320$.

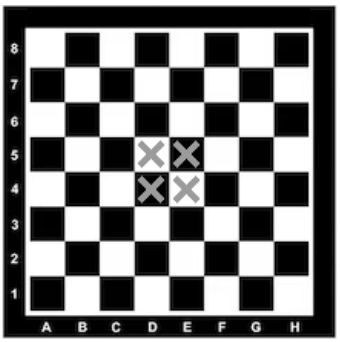
Ответ: 320 различных флагов.

Критерии:

- Приведено верное обоснованное решение — 4 балла.
- Допущена арифметическая ошибка, не влияющая на логику решения — 3 балла.

- Флаги получающиеся друг из друга переворотом ошибочно считались одинаковыми, при этом для таких флагов их количество посчитано верно — 3 балла.
- В решении происходит перебор видов флагов (по аналогии со 2 решением), но один вариант упущен, остальные же посчитаны верно — 1 балл.
- В решении, аналогичном первому, неверно посчитано количество способов для одной из полос — 1 балл.

5. Из шахматной доски вырезали 4 центральные клетки, как показано на рисунке. В некоторой не вырезанной клеточке доски стоит ферзь. Два игрока двигают его по очереди. За ход ферзя можно передвинуть на любое число полей вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх», но при этом ферзь не может встать или «перелететь» через вырезанные клетки. Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле $h8$. При каких начальных позициях ферзя у второго игрока есть выигрышная стратегия (т.е. алгоритм действий, следуя которому второй игрок будет побеждать вне зависимости от ходов первого игрока). Найдите все варианты таких клеток и докажите, что других вариантов нет.



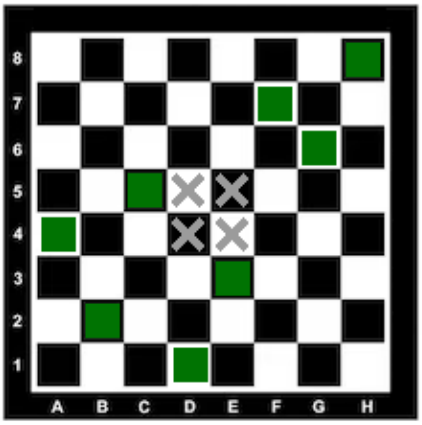
Решение: Посмотрим на клеточку $h8$, если ферзь стоит в ней, то игра не сможет даже начаться (т.к. из этой клеточки нельзя сделать ход), значит выигрышной стратегии нет ни у одного из игроков. Назовем клеточку $h8$ «хорошей». Теперь будем называть другие клеточки доски по следующим правилам:

- Клеточка называется «плохой», если из нее можно попасть за один ход в «хорошую» клеточку.
- Клеточка называется «хорошей», если любой ход из нее ведет в «плохую» клеточку.

Распределим все остальные клеточки на «хорошие» и «плохие».

- Клеточки $a8, b8, c8, d8, e8, g8, f6, g6, h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7$ — «плохие», т.к. за один ход из них можно попасть в «хорошую» $h8$.
- Клеточки $f7$ и $g6$ — «хорошие», т.к. из них все ходы ведут в некоторые клеточки из прошлого пункта, т.е. в «плохие».

- Теперь для новых «хороших» клеточек, ищем все те, из которых можно в них попасть за один ход и называем их «плохими». Это все ранее не упомянутые клеточки 6 и 7 строки, а также столбцов f и g.
- Остальные клеточки заполняем по аналогии. На рисунке изображено финальное распределение клеточек. Зеленым цветом отмечены «хорошие» клеточки, все остальные клеточки являются «плохими».



Докажем, что, если ферзь стоит в любой «хорошей» клеточке кроме $h8$, то у второго игрока есть выигрышная стратегия. Из условий распределения клеток следует, что первый игрок из «хорошей» клеточки обязан сходить в «плохую», после чего второй игрок всегда сможет сходить снова в «хорошую». Т.к. ферзь каждый ход становится ближе к клеточке $h8$, то игра когда-нибудь закончится попаданием ферзя в клеточку $h8$. При этом мы доказали, что, следуя стратегии, сходить в «хорошую» клеточку мог только 2 игрок. Значит он побеждает вне зависимости от действий первого игрока. Теперь докажем, что, если ферзь стоит в любой «плохой» клеточке, то у второго игрока нет выигрышной стратегии. Действительно, ведь первый игрок может в таком случае воспользоваться нашей стратегией из прошлого пункта (сходить в «хорошую» клеточку), а значит первый игрок может обеспечить победу себе, т.е. победа второго игрока, при положении ферзя в этих клетках, зависит от действий первого.

Ответ: Такими клеточками являются: $a4, b2, c5, d1, e3, f7, g6$.

Критерии:

- Приведено верное обоснованное решение — 4 балла.
- Найдены все клеточки, доказано, что они подходят, но не доказано, что среди остальных клеток нет подходящих — 3 балла.
- Найдены все клеточки без обоснований и не указаны неправильные — 2 балла.
- Найдены хотя бы 4 клеточки и не указаны неправильные — 1 балл.
- При верном использовании метода выигрышных и проигрышных позиций в математических играх расписывать стратегию было необязательно.
- Включение клеточки $h8$ в список подходящих клеточек допустимо, однако она не учитывается в подсчете клеточек в пункте «хотя бы 4».
- За отсутствие обоснования того, что игра закончится (т.е. ферзь обязательно дойдет до клеточки $h8$), баллы не снижаются.