# Вступительная олимпиада 5 класса. Решения.

**1.** Вычислите значение выражения:

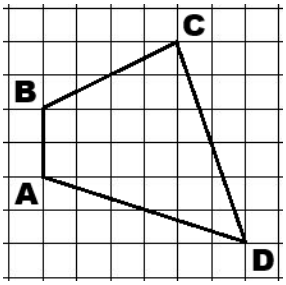
$$\frac{13}{15} : \frac{3}{5} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3}$$

**Ответ:** $\frac{86}{45}$

**Решение:**

$$\frac{13}{15} : \frac{3}{5} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13 \cdot 5}{15 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{10 \cdot 3} = \frac{13}{9} + \frac{14}{30} = \frac{130}{90} + \frac{42}{90} = \frac{172}{90} = \frac{86}{45}$$

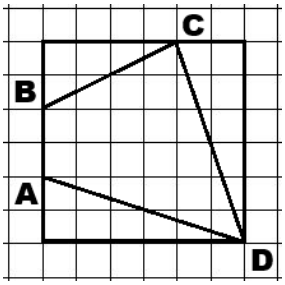
**2.** Посчитайте площадь четырехугольника $ABCD$ (в клеточках) на картинке справа.




**Ответ:** 20 клеточек

**Решение 1:**

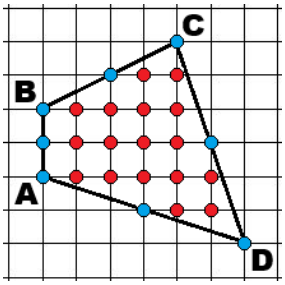
Достроим четырехугольник $ABCD$ до квадрата $6 \times 6$, как показано на рисунке справа. Тогда площадь $ABCD$ можно найти как площадь квадрата $6 \times 6$ без площадей трех достроенных треугольников.




$$S_{ABCD} = 6 \cdot 6 - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{6 \cdot 2}{2} - \frac{6 \cdot 2}{2} = 36 - 4 - 6 - 6 = 20$$

**Решение 2:**

Применим формулу Пика. Количество внутренних вершин $\mathbf{i} = 17$, количество вершин на границе $\mathbf{b} = 8$, тогда




$$S_{ABCD} = \mathbf{i} + \frac{\mathbf{b}}{2} - 1 = 17 + 4 - 1 = 20$$

**3.** На берегу реки стоит деревня Грушевка, а на некотором расстоянии вниз по течению от нее находится деревня Яблочково. Из Грушевки в Яблочково отправился пароход с собственной скоростью 15 км/ч, а из Яблочково в Грушевку в это же время выплыл катер с собственной скоростью 45 км/ч. Найдите скорость течения реки, если известно, что катер добрался до Грушевки в 2 раза быстрее, чем пароход доплыл до Яблочково.

**Ответ:** 5 км/ч

**Решение:**

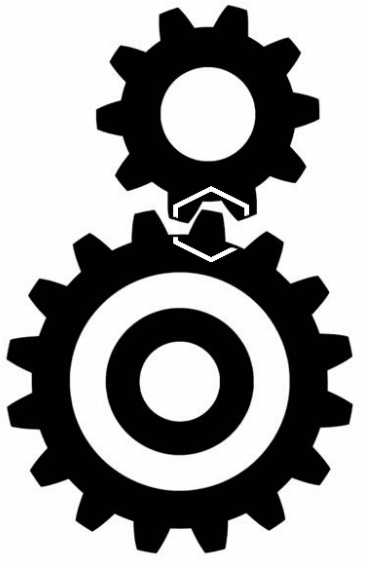
Пусть $v$ — скорость течения реки. Тогда, с учетом течения, скорость парохода равна $15 + v$ км/ч, а скорость катера — $45 - v$ км/ч. Расстояние между деревнями фиксированное, и раз катер доплыл в 2 раза быстрее парохода, то его скорость была в 2 раза выше. Получаем уравнение:

$$2 \cdot (15 + \nu) = 45 - \nu$$

$$30 + 2 \cdot \nu = 45 - \nu$$

$$3 \cdot \nu = 45 - 30 = 15$$

$$\nu = 5$$



**4.** Саша нарисовал белой краской на двух шестеренках силуэт шестиугольника, как показано на рисунке, после чего шестеренки начали вращение. Через какое количество оборотов маленькой шестеренки силуэт впервые вернется в первоначальное положение?

**Ответ:** 8

**Решение:**

Посчитаем зубчики шестеренок: на маленькой их 10, на большой — 16. Значит маленькая шестеренка возвращается в первоначальное положение раз в 10 поворотов, а большая — раз в 16. Тогда шестиугольник будет возвращаться в изначальное положение раз в $\text{НОК}(10, 16) = 80$ поворотов. Чтобы маленькой шестеренке совершить 80 поворотов, потребуется $\frac{80}{10} = 8$ оборотов.

**5.** Маша, Алина и Снежана собираются съесть торт. Известно, что Маша и Алина вместе съедают такой торт за 15 минут, Маша и Снежана — за 12 минут, Алина и Снежана — за 20 минут. За какое время все три девочки вместе съедят этот торт?

**Ответ:** 10 минут

**Решение 1:**

Заметим, что за один час Маша и Алина съедят 4 торта, Маша и Снежана — 5 тортов, Алина и Снежана — 3 торта. Тогда все три девочки, посчитанные дважды, съедят 12 тортов за один час. Т.е. три девочки съедят 6 тортов за 1 час, а значит 1 торт за 10 минут.

**Решение 2:**

Пусть $\nu_m$ тортов в минуту — скорость Маши, $\nu_a$ — скорость Алины, $\nu_s$ — скорость Снежаны. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \nu_m + \nu_a = \frac{1}{15} \\ \nu_a + \nu_s = \frac{1}{12} \\ \nu_s + \nu_m = \frac{1}{20} \end{cases}$$

Сложим все три уравнения и получим:

$$2 \cdot (\nu_m + \nu_a + \nu_s) = \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$$\nu_m + \nu_a + \nu_s = \frac{1}{10}$$

Значит три девочки съедят 1 торт за 10 минут.

**6.** Найдите наибольший общий делитель чисел 2747 и 1927.

**Ответ:** 41

**Решение 1:**

Заметим, что если 2747 и 1927 оба делятся на какое-то число, то и их разность $2747 - 1927 = 820$ делится на это число. Поймем, что $820 = 41 \cdot 20 = 41 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. Числа 2747 и 1927 не делятся ни на 2, ни на 5, а значит единственный общий делитель отличный от 1, который у них может быть, это 41. Проверив делимость $2747 : 41 = 67$ и $1927 : 41 = 47$, убеждаемся, что $\text{НОД}(2747, 1927) = 41$.

**Решение 2:**

Применим алгоритм Евклида.

$$2747 = 1927 \cdot 1 + 820$$

$$1927 = 820 \cdot 2 + 287$$

$$820 = 287 \cdot 2 + 246$$

$$287 = 246 \cdot 1 + 41$$

$$246 = 41 \cdot 6$$

Получаем, что $\text{НОД}(2747, 1927) = 41$.