Вступительная олимпиада 5 класса. Решения.

1. Вычислите значение выражения:

$$\left(\frac{13}{14} - \frac{6}{35} : \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{8}{15}$$

Ответ: $\frac{4}{21}$

Решение:

$$\left(\frac{13}{14} - \frac{6}{35} : \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{8}{15} = \left(\frac{13}{14} - \frac{6 \cdot 10}{35 \cdot 3}\right) \cdot \frac{8}{15} = \left(\frac{13}{14} - \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{8}{15} = \frac{5}{14} \cdot \frac{8}{15} = \frac{4}{21}$$

2. Алина собирает 500 грамм малины за 30 минут. Вместе со своей подругой Машей они соберут такое же количество малины за 10 минут. За сколько минут собирает 500 грамм малины одна Маша?

Ответ: за 15 минут.

Решение:

Раз Алина собирает 500 грамм за 30 минут, а вместе с Машей они справляются за 10 минут, то Маша за 10 минут собирает столько же ягод, сколько Алина за 20 минут. Значит скорость Маши в два раза больше скорости Алины и Маша соберет 500 грамм в два раза быстрее, т.е. за 15 минут.

3. На кольцевой беговой дорожке длинной 1 км из одной точки одновременно стартовали 2 бегуна, двигаясь в одном направлении. Первый бегун бежал со скоростью 15 км/ч. Через 20 минут он опередил второго бегуна на один круг. С какой скоростью бежал второй бегун?

Ответ: 12 км/ч.

Решение:

За 20 минут, т.е. за $\frac{1}{3}$ часа, первый бегун пробежал $15 \cdot \frac{1}{3} = 5$ км. Второй бегун за это время отстал на 1 круг, т.е. пробежал на один километр меньше — 4 км. Значит скорость второго бегуна равна 4 км за 20 минут, или же 12 км/ч.

4. Верно ли, что для любого натурального n значение выражения $n^2 - n + 17$ является простым числом?

Ответ: Нет.

Решение:

Подставим $n = 17$, тогда $n^2 - n + 17 = 17^2 - 17 + 17 = 17^2$ — не простое число.

Комментарий. Удивительно, но при $1 \leqslant n \leqslant 16$ *это выражение действительно принимает только простые значения.*

5. У капитана в роте есть несколько (больше одного) солдат. Капитан захотел разделить роту на несколько равных отрядов. Он попробовал разделить роту сначала на отряды по 10

солдат, следом на отряды по 12 солдат, затем на отряды по 15 солдат. Но каждый раз один солдат оставался «лишним». Какое наименьшее количество солдат может служить в данной роте?

Ответ: 61.

Решение:

Если временно выгнать 1 солдата из роты, то количество солдат поделится нацело и на 10, и на 12, и на 15. Т.к. количество солдат оставшееся в роте больше нуля, то наименьшее такое число равно $\text{НОК}(10, 15, 20) = 60$. Вернув выгнанного солдата получаем, что наименьшее количество солдат в роте равно 61.

6. В 2026-этажном доме работает только странный лифт. В этом лифте есть всего две копки:

- При нажатии на первую кнопку лифт поднимается на 42 этажа наверх. (Например, с 1 этажа сразу на 43 этаж)
- При нажатии на вторую кнопку лифт опускается на 33 этажа вниз.

Лифт не может опуститься ниже 1 этажа или подняться выше 2026 этажа. При попытке это сделать соответствующая кнопка перестает работать. Можно ли на таком лифте доехать до

(а) 2026 этажа? **(б)** 1013 этажа?

Ответ: а) да, б) нет.

Решение:

(а) Нажмем на кнопку «+42», затем на «−33», следом 48 раз на «+42». Мы проедем $42 - 33 + 48 \cdot 42 = 2025$ этажей, т.е. как раз попадем с 1 этажа на 2026. Несложно видеть, что при этом мы никогда не оказывались ниже 1 или выше 2026 этажа.

(б) Чтобы попасть с 1 этажа на 1013 нужно проехать 1012 этажей. Однако числа 42 и 33 делятся на 3, а значит с помощью кнопок мы можем проехать только количество этажей кратное трем. 1012 на три не делится, а значит такое количество этажей мы проехать не могли.